数理解析研究所講究録
189巻 1973年 52-59

Theorem-proving の program

東教大　理　西村敏男
東教大　理　井出　修
九大　工　大矢建正
東教大　理　神居雅志

§1.

定理の証明を機械によって行わせる試みは，既にいくつかある。第8回プログラミング・シンポジウム（1967）で報告された西村，伊大知等[1]の研究もその一つである。述語論理の体系としては，LK を基礎とし，Definition の推論規則を加えたもので，Problem が Assumption（[1]では 'Theorem' と呼んでいる），Definition と共に計算機の入力として与えられたとき，もし，その Problem が Assumption 及び Defimtion から証明可能ならば，その証明を出力するものである。我々の試みは上記のものを発展させたもので，証明を得るための基本的な考え方は同一のものである。しかし，次のような新しい

概念や処理手順の導入によって，計算機の処理能力の増大を計った。

1) Function の導入

Predicate の argument は単に variable のみに限らないで，term の概念を入れ，function value も含むことにした．また，function symbol は constant と考えるのではなく，variable とし bound され得るものとした．

Assumption の existential quantifier によって bound された variable は，それに先行する universal quantifier によって bound された variables に depend した function value (Skolem function) に置き換え，existential quantifier を消去する．

2) Type の導入

各 variable (term) は一つの type に属するものとし，variable へ代入されるべき term は type が同じものに限ることにする．

Type declaration の入力により，variable の属する type は定められる．

3) Assumption 及び Lemma の reduction

Assumption または assumption に cut の推論規則を適用して得られた lemma (以下単に assumption ということにす

51

3) L_1, L_2 が

$$\vdash L_1 \to L_2$$

であるとき，$L_1 < L_2$ と書いて，L_1 は L_2 より"強い"と呼ぶことにする．$L_1 < L_2$ のとき，assumption の set から L_2 を除くことを"assumption の reduction"と呼ぶことにする．

4) 各 part の module 化

Theorem proving の program の主な部分は

a) 'DECOMPOSE' --- Problem を推論規則に従って分解する

b) 'CHECK' --- Upper most sequent が provable であるかどうかの check を行う．

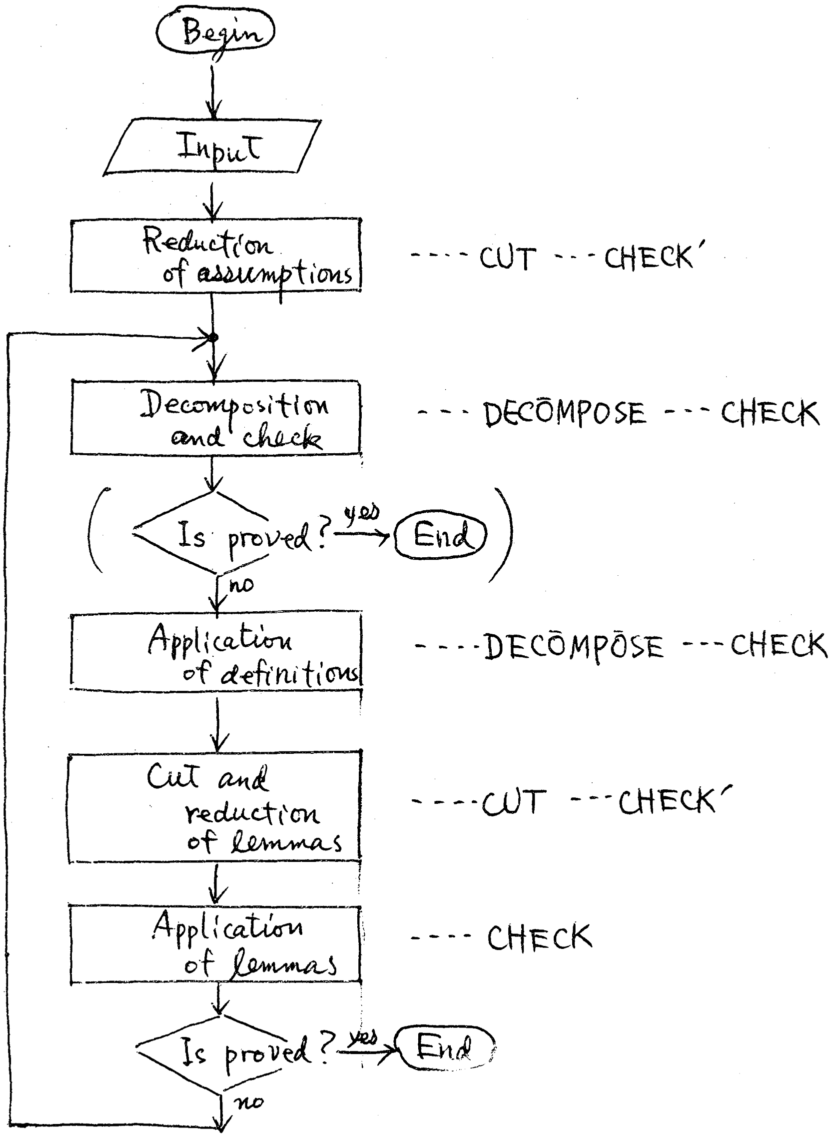
c) 'CUT' --- Assumption に cut の推論規則を適用して lemma を作り出し，reduction を行う．

と呼ばれる routine である．これらの routines 及び I/O-routines 等は module 化されており，processing arrangement を入力指令により control できるようにしている．

5) その他，計算機の機種による物理的制約，プログラミング・テクニック上の制約が緩められ，space-, time-economy についての配慮がなされた。

§2.

Algorithm の概略は次のようなものである。



1) Input

Data (Type declarations, Definitions, Assumptions, Problem) 及び processing control の入力を行う。

2) Reduction of assumptions

入力されたassumptionsを整理する．即ち，single formula assumptionとcutできるassumptionにはcutを行い，得られたlemmas及びassumptionsについてreductionを行う．

（以下の例においては，次のような記号で記述する．

bound variable：u, v, w, x, y, z

free variable：u, v, w, x, y, z 以外の英小文字

apparent variable：ギリシャ文字

およびそれらに $'$ または添字をつけたもの

predicate symbol：英大文字，および $=$, $\underset{A}{=}$, $\underset{B}{=}$, $\underset{C}{=}$, $\in$, $\underset{A}{\in}$, $\underset{B}{\in}$, $\underset{C}{\in}$ ）

例 $\begin{cases} \text{Ass. 1} & Q(x, y) \\ \text{Ass. 2:} & \neg P(x, y, z, u), \neg Q(u, v), R(w(u), w(v)) \end{cases}$

Ass. 2 において，bound variable x, y を新しい bound variable x', y' で置き換え，

Ass 2': $\neg P(x', y', z, u), \neg Q(u, v), R(w(u), w(v))$

とする．Ass. 2' の u に x を，v に y を代入して cut を行うと次の lemma を得る．

Lemma: $\neg P(x', y', z, x), R(w(x), w(y))$

Lemma は Ass. 2 より強い．したがって assumptions

は

$$\begin{cases} \text{Ass.1}: Q(x,y) \\ \text{Lemma}: \neg P(x', y', z, x),\ R(w(x), w(y)) \end{cases}$$

に reduce される.

3) Decomposition and check

入力された problem を推論規則によって分解する. もしも, upper most sequent が得られたならば provable であるかどうかの check を行う. 即ち, もしこの sequent に属するすべての apparent variable にどのような term が代入されようとも, この sequent が provable であるならば, この sequent は ~~捨てられ~~ 処理を終ったものとして, 処理中の sequent 群から除かれる. ~~さ~~. またこの sequent に属するいくつかの apparent variable に適当な term が代入されたとき provable であるならば, それらの apparent variable と term の対は sequent と共に記録される.

例1. $\begin{cases} \text{Ass.}: x \in a \\ \text{Seq.}: \xi \in a,\ \neg \eta \in a \end{cases}$

$x \leftarrow \xi$
trivially provable from ass.

($\xi \leftarrow \eta$
provable from logical axiom)

例2. $\begin{cases} \text{Ass.}: \neg x \underset{B}{=} y,\ z(x) \underset{C}{=} z(y) \\ \text{Seq.}: \neg \alpha \underset{B}{=} f(a),\ \neg \beta \underset{C}{=} g(b),\ \neg \gamma \underset{A}{=} \delta,\ g(\xi) \underset{C}{=} g(\eta) \end{cases}$

$\begin{cases} \beta \leftarrow g(\xi) \\ \eta \leftarrow b \end{cases}$
provable from logical axiom

$$\begin{cases} x \leftarrow \alpha \\ y \leftarrow f(a) \\ z \leftarrow g \\ \xi \leftarrow \alpha \\ \eta \leftarrow f(a) \end{cases}$$

provable from ass.

4) Application of Definition

~~4)~~ Upper most sequents を構成する (prime) formula で, Definition が適用されうるものにはすべて適用する. 即ち, ある definition の左辺にあらわれる bound variable に適当な term を代入したとき, その左辺が upper most sequent の formula と一致するならば, その右辺を sequent に付け加える. そして更に分解・check を行う.

5) Cut and reduction

Assumption と, 前回の cut で得られた lemma との間で cut の推論規則を適用できるものがあれば, 適用して新しい lemma を作り出す. 得られた lemmas は assumptions 及び既存の lemmas との間で reduction が行われる.

例 Ass 1: $\neg x_{11} = x_{12}\ ,\ z_{11}(x_{11}) = z_{11}(x_{12})$

Ass. 2: $\neg x_{21} = x_{22}\ ,\ \neg x_{22} = x_{23}\ ,\ x_{21} = x_{23}$

1 回目 の cut

L 1: $\neg x_{111} = x_{112}\ ,\ z_{111}(z_{112}(x_{111})) = z_{111}(z_{112}(x_{112}))$

reduced by Ass. 1 $\{$ Ass. 1_1 , Ass. 1_2 $\}$

L 2: $\neg x_{121} = x_{122}\ ,\ \neg z_{121}(x_{122}) = x_{123}\ ,\ z_{121}(x_{121}) = x_{123}$

$\{$ Ass. 1_2 , Ass. 2_1 $\}$

⋮

$\llcorner$ 4: $\neg x_{141} = x_{142}, \neg x_{142} = x_{143}, \ z_{141}(x_{141}) = z_{141}(x_{143})$

⋮ $\{Ass.1_1, Ass.2_3\}$

2回目の cut

$\llcorner$ 7: $\neg x_{171} = x_{172}, \neg x_{173} = x_{171}, \ z_{171}(x_{173}) = z_{171}(x_{172})$

reduced by L4. $\{Ass.1_2, L2_2\}$

6) Application of lemmas

Upper most sequents が新しく得られた lemma から provable かどうかの check を行う。

7) Is proved ?

Problem を分解して得られているすべての upper most sequent が, provable になるような apparent variables への terms の代入が可能かどうかを調べ, もし可能ならば, problem は assumptions 及び definitions から証明可能であったことになる。

文献

[1] 西村, 伊大知　数学の証明を行なうプログラム
第8回プログラミング・シンポジウム報告集